Jeu d'été pour les collégiens de l'année 2008

Salut, a tous les participants. J'ai décidé d'écrire tous les exercices proposés dans notre jeu, (Petit jeu d'été pour les collégiens) pour que touts les participant aie la chance de faire une révision des exercices que n'ont pas pu les résoudre.

N'oublier que ce que Thomas Edison a dit :

Je n'ai pas échoué, j'ai trouvé dix mille moyens qui ne fonctionnent pas

EXERCICE 1 :

Soit x et y deux réels positives. Sachant que :

$$\sqrt{y+z}+\sqrt{x}<\sqrt{x+z}+\sqrt{y}$$

Comparer x et y.

EXERCICE 2 : Soit a et b et c des réels positives.

Monter que: $a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)\geq 6abc$

EXERCICE 3 :

Soit a et b et c des réels positives tels que : $a+b+c=1$

Montrer que :

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq\frac{4}{3}$$

EXERCICE 4

Soit a et b et c des réels positives tels que : $abc=1$

Montrer que :

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1$$

EXERCICE 5 :

Montrer que

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{5+\sqrt{21}}$$

EXERCICE 6 :

Factoriser :

$$(x(x^2+3x+1)+1)^2-(x+(x^2+3x+1))^2$$

EXERCICE 7 :

Résoudre en R les équations suivantes **:**

$1).\to 2x^3+8x^2+2x-12=0$

$1).\to x^4+2x^3+2x^2+2x+1=0$

EXERCICE 8 : Soit a et b deux réels positive.

Montrez que :

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}\leq a+b+2$$

EXERCICE 9 :

Soit a et b deux réels strictement positives tels que : $a + b = 1$

Montrer que :

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

EXERCICE 10 :

Ecrire sous la forme de trois carrés le nombre S suivants :

$$S = \left(a^2 + 2ab + b^2 + a + b + 1\right)^2$$

EXERCICE 11 :

Est-ce que A=B sachant que :

$$A = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$$

$$B = \sqrt{11 + 2\sqrt{99}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$$

EXERCICE 12 :

Calculer a et b sachant que :

$a + b = 1$ Et $a^2 + b^2 = 2$

EXERCICE 13 :

Sachant que : $(5x - 2y)(x - 2y) = 9xy$

Calculez: $\dfrac{2x + 3y}{3x - 2y}$

EXERCICE 14 :

Sachant que $3^{10} = 59049$ et $2^{10} = 1024$

Calculer :

$$A = 1 + (3 - 2) + (3^2 - 2^2) + (3^3 - 2^3) + \ldots + (3^9 - 2^9)$$

EXERCICE 15 :

Soit a et b deux nombres appartenant a IN, tels que :

$\left(1 + \sqrt{2}\right)^{2006} = a + b\sqrt{2}$, calculer :

$a^2 - 2b^2$

EXERCICE 16 :

On pose : $K = \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - 1}$

Calculer $K = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2} - 1}$ en fonction de K

EXERCICE 17 :

Résoudre dans IR l'équation :

$$\left(3x^2-2x+1\right)^2=x^4-4x^3+4x^2$$

EXERCICE 18 :

Soit a ; b ; c et d des réels positifs. Prouver que :

$$a^2bc+ab^2d+ac^2d+bcd^2\geq 4abcd$$

EXERCICE 19 : Soit n un entier naturel strictement positive :

1).→ montrer que :

$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$$

2). →Déduire que :

$$2\left(\sqrt{10001}-1\right)\leq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10000}}\leq 200$$

EXERCICE 20 :

Soit x et y des réels strictement positives. Prouver que :

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geq\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$$

EXERCICE 21 :

Calculez :

$$A=\frac{n}{n(n+1)}+\frac{n}{(n+1)(n+2)}+\frac{n}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{n}{2n(2n+1)}$$

Pour tous n non nul.

EXERCICE 22 : posté

Montrer que :

$A=1000000000000000000001$ N'est pas un nombre premier.

EXERCICE 23 :

$$x=\sqrt{35+10\sqrt{10}}$$

1). → calculer x

2). → sachant que : $a^2-b=c^2$ prouver que :

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

3). → calculer x d'une autre manière.

EXERCICE 24 :

Soit a et b deux réels tels que : $0<b\leq a$

Sachant que :

$$A=\frac{1+a+a^2+\ldots+a^{2002}}{1+a+a^2+\ldots+a^{2003}}$$

$$B = \frac{1 + b + b^2 + ... + b^{2002}}{1 + b + b^2 + ... + b^{2003}}$$

Comparer A et B.

EXERCICE 25 :

Soit x et y deux réels tels que : $x + 2y = \frac{1}{2}$

Prouver que :

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$$

EXERCICE 26 :

Soit a et b deux réels strictement positifs et x et y deux élément de IR.

On pose : $ax + by = k$

Prouver que :

$$x^2 + y^2 \geq \frac{k^2}{a^2 + b^2}$$

EXERCICE 27 : Soit a et b deux réels tels que : $a^2 + b^2 = 1$

Prouver que :

$$-\sqrt{2} \leq a + b \leq \sqrt{2}$$

EXERCICE 28 :

Soit n un entier naturel non nul.

Prouver que $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ n'est pas un carré parfait.

EXERCICE 29 :

Soit ABC un triangle.

→Le milieu de l'angle BÂC coupe [BC] en E.

→Le parallèle de [AC] et qui passe par E coupe [AB] en F.

Prouver que :

$$EF = \frac{AB \times AC}{AB + AC}$$

EXERCICE 30 :

Soit a un réel strictement positif tels que :

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = 18$$

Calculer :

$$a^4 + \frac{1}{a^4}$$

EXERCICE 31:

Soit a ; b et c les longueurs des côtés d'un triangle. Prouver que :

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$$

EXERCICE 32: Soit x un réel strictement positif tels que :
$$\sqrt{x+28}+\sqrt{x}=14$$
Calculer la valeur de x.

EXERCICE 33:
Soit a ; b et c des réels strictement positifs. Prouver que :
$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\leq 3$$

EXERCICE 34: Résoudre en IR les équations suivantes:

1) .→ $x^4+10x^3+26x^2+10x+1=0$

2). →$4u^4+9u^3+14u^2+9u+4=0$

EXERCICE 35:
Soit a ; b et c des réels strictement positifs. Prouver que :
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3$$

EXERCICE 36: Soit n un entier naturel. Prouver que :
$$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\leq 1$$

EXERCICE 37: Soit n un entier naturelle non nul. Prouver que :
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}$$

EXERCICE 38:

1). → résoudre en IR l'équation suivante :
$$x^3+2x^2+4x+8=0$$

2). → déterminer toute les fonctions f de $R\rightarrow R^{+}$ tels que :
$$f\left(f(x)+y\right)=f\left(x^2-y\right)+4yf(x)$$

EXERCICE 39:

Prouver que pour tous n impair : n^4-1 Est divisible par 16

EXERCICE 40:

Soit n un entier naturel. Trouver la racine carré de $n(n+3)$: puis calculer la valeur de n sachant que : $n(n+3)=3538$

EXERCICE 41 :
Prouver que :
$$cos^6x+sin^6x+3sin^2x\times cos^2x=1$$

EXERCICE 42 :
Résoudre dans IR l'équation suivante :
$$x^3-\frac{141\sqrt{3}+12}{2}x^2+\left(105+429\sqrt{3}\right)x-\frac{141\sqrt{3}+12}{2}=0$$

EXERCICE 43 :
Soit x un réel. Prouver que :

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \geq \frac{1}{2}$$

EXERCICE 44 :

Résoudre dans IR l'équation suivante :

$$\left(2x^3 + 8x^2 + 2x - 11\right)^{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = 1$$

EXERCICE 45 :

Soit a et b deux réels positifs tels que : $a + b = 1$

Prouver que :

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}$$

EXERCICE 46 :

Déterminer tous les fonctions f de $R^{+*} \rightarrow R$ et qui vérifient :

$$f(x)f(y) = f(xy) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

EXERCICE 47 :

Soit a ; b et c les longueurs des côté d'un triangle. Prouver que :

$$(a+b+c)^2 \leq 4(ab+bc+ca)$$

EXERCICE 48 :

Résoudre le système suivant :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{6}$$

$$x + y + z = 6$$

EXERCICE 49 :

Soit a ; b et c réels strictement positifs tels que : $abc = 1$

Prouver que :

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1} = 1$$

EXERCICE 50 :

يضم هذا المربع السحري الأعداد من 7 إلى 15.

املء هذا المربع علما أن لكل سطر أفقي و عمودي و قطر نفس المجموع.

		7
		14

EXERCICE 51 :

Soit $(a; b; c; d) \in R^{+*}$ tel que : $a + b + c + d = 1$

Prouver que:

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{a+c+d}+\frac{c^2}{b+a+d}+\frac{d^2}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$$

EXERCICE 52 :

Soit x ; y et z des réels strictement positifs. Prouver que :

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}\geq\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}$$

EXERCICE 53 :

Soit $(x;y;z;t)\in R$ tels que: $(x;y;z;t)\geq -1$

prouver que:

$$x^3+y^3+z^3+t^3\geq\frac{1}{2}$$

EXERCICE 54 :

Soit x ; y et z des réels, tels que : $xy+yz+zx+2xyz=1$

Prouver que :

$$xyz\leq\frac{1}{8}$$

EXERCICE 55 :

Soit x et y deux réels strictement positifs. Prouver que :

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2}\leq\frac{1}{xy}$$

EXERCICE 56 :

Soit n un entier naturel. Prouver que :

$$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\leq\frac{3}{4}$$

EXERCICE 57 : Soit $a,b,c>0$ tels que: $abc=1$

Montrer que:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1$$

EXERCICE 58 :

Soit a ; b et c des réels positifs tels que :

$$a+b+c=3$$

Prouver que :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca$$

EXERCICE 59 : posté

Soit a ; b et c des réels positifs tels que :

$$3a^2=2\left(c^2-b^2\right)$$

Trouver le plus grand d'entre ces nombres :

EXERCICE 60 :
Soit a ; b ; c ; d et e des réels. Prouver que :
$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e)$
EXERCICE 61 :
Résoudre en IR le système suivant :
$x+y+z=2$
$x^2+y^2+z^2=6$
$x^3+y^3+z^3=8$
EXERCICE 62 :
Soit $a;b;c;d>0$ tels que : $a^2+b^2=(c^2+d^2)^3$
Prouver que :
$\frac{c^3}{a}+\frac{d^3}{b} \geq 1$
EXERCICE 63 :
Soit $x;y;z \geq 0$ tels que : $xyz \geq xy+yz+zx$
Prouver que : $xyz \geq 3(x+y+z)$
EXERCICE 64 :
Soit x et y deux réels de même signe. Prouver que :
$$\frac{2xy}{x+y}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}$$
EXERCICE 65 :
Soit a et b et c des réels positive tels que : $a+b+c=1$
Prouver qu'au moins l'un de ces nombres $a-ab$; $b-bc$ et $c-ca$ est supérieure a $\frac{1}{4}$ et un autre est inférieure a $\frac{2}{9}$
EXERCICE 66 :
Soit a ; b et c trois réels positives. Prouver que :
$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$$
EXERCICE 67
Sachant que : $2^{24}=16777216$
Calculer :
$$S=15+(15\times 16)+(15\times 16^2)+(15\times 16^3)+(15\times 16^4)+(15\times 16^5)$$
EXERCICE 68 :
Soit a et b et c trois réels positives tels que : $abc=1$
Prouver que :
$$\sum_{cyc}\frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$$
EXERCICE 69 :

1). →trouver tous les polynômes P tels que :

$$P(1) = 2; P(2) = 4; P(4) = 7 et P(6) = 8$$

1). →résoudre en IR l'équation suivante :

$$(x-4)(x-2)(x+5)(x+7) = 8$$

EXERCICE 70 :

Soit a ; b ; c et d des réels strictement positives tels que : $ab + bc + cd + da = 1$

Prouver que :

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{b+c+d} \geq \frac{1}{3}$$

EXERCICE 71 :

Résoudre en IN* l'équation :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

EXERCICE 72 :

Résoudre en IR les équations suivantes :

1). → $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$

2). → $x(2x+1)(x-2)(2x-3) = 63$

EXERCICE 73 :

Calculer la somme suivante :

$$S = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \ldots + n(n+1)(n+2)$$

EXERCICE 74 :

Soit x et y deux réels tels que : $x + y = 1$

1). → prouver que : $xy \leq \frac{1}{4}$

2). → prouver que : $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$

EXERCICE 75 :

Soit x ; y et z trois réels strictement positives. Prouver que :

$$\frac{x^2 - y^2}{y+z} + \frac{y^2 - z^2}{x+z} + \frac{z^2 - x^2}{x+y} \geq 0$$

EXERCICE 76 :

Soit x ; y et z trois réels strictement positives. Prouver que :

$$\frac{x+y}{x} + \frac{y+z}{y} + \frac{z+x}{z} \geq 6$$

EXERCICE 77 :

Soit a ; b et c trois réels strictement positives tels que : $a + b + c = 1$ Prouver que :

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}$$

EXERCICE 78 :

Calculer la somme S suivante :

$$S = \frac{1}{2\times 5} + \frac{1}{5\times 8} + \ldots + \frac{1}{2000\times 2003} + \frac{1}{2003\times 2006}$$

EXERCICE 78 : Soit x ; y et z trois réels strictement positives tels que : $x + y + z = 1$

Prouver que :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64$$

EXERCICE 78 :

Soit x et y deux réels strictement positives tels que : $x + y = 8$

Prouver que :

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{x}\right)^2 \geq \frac{289}{8}$$

EXERCICE 78 :

Soit a ; b et c les longueurs des côté d'un triangle et S sa surface et p sont demi périmètre.

Prouver que : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

EXERCICE 79 : posté

Soit x et y deux entiers. Montrer que 7 ne divise $2x+3y$ que si il divise $5x+4y$.

EXERCICE 80 :

Soit $a_1; a_2; \ldots; a_n > 0$ tels que : $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n (1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_n)}{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}$$

Enfin nous remercions tous ce qui on participer avec nous en ce jeu. Qui était vraiment un défi chaleureux et une grande amélioration des informations. On vous annonce la fin du jeu espérons qu'on se revoie dans un autre jeu. Bonne continuation a tous les participants.